الدائـــرة

تعريفها : هي مجموعة نقط المستوي α التي بعد كل منها عن نقطة ثابتة O من المستوي يساوي مقدارا" ثابتا" R موجبا"

تسمى النقطة الثابتة O مركز الدائرة , والبعد الثابت R نصف قطرها , ونرمز الدائرة $C (O , R)$.

الشكــل النمــوذجي لمعادلــة دائـرة

$$C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

* تذكرة : دستور البعد بين نقطتين : $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

- حالة خاصة : إذا كان مركز الدائرة منطبقا" على مبدأ الإحداثيات تصبح معادلتها : $x^2 + y^2 = R^2$

الشكــل العــام لمعادلــة دائـرة

$$x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

- مناقشة : بعد إتمام المعادلة السابقة إلى مربعين كاملين تصبح : $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$ ونميز :

1) إذا كان الطرف الثاني $D = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$ فالمعادلة تمثل دائرة .

مركزها $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, ونصف قطرها $R = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c}$

2) إذا كان الطرف الثاني $D = 0$ فالمعادلة تمثل نقطة وحيدة $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ (أي مجموعة وحيدة العنصر)

3) إذا كان الطرف الثاني $D < 0$ فالمعادلة تمثل مجموعة خالية .

التمثيـل الوسيطـي لدائـرة

$$x = x_0 + R \cdot \cos\theta \quad , \quad y = y_0 + R \cdot \sin\theta$$

دراســة الوضــع النسبــي لدائـرة ومستقيـم

نحسب ℓ بعد مركز الدائرة عن المستقيم ونميز الحالات :

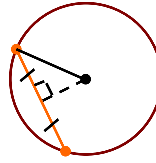
1) $\ell < R$ يتقاطعان بنقطتين مختلفتين .   2) $\ell = R$ يتماسان بنقطة وحيدة .   3) $\ell > R$ لا يتقاطعان .

* تذكرة : دستور بعد نقطة (x_0 , y_0) عن مستقيم : $\ell = \frac{|a_1 \cdot x_0 + b_1 \cdot y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$ حيث : a_1 , b_1 , c_1 ثوابت المستقيم

* ملاحظة : يمكن دراسة الوضع النسبي للمستقيم مع الدائرة بحل جملة معادلتيهما حلا" مشتركا" (طريقة عامة)

* ملاحظة : محور قطعة مستقيمة هو العمود عليها من منتصفها .

* ملاحظة : محور أي وتر في دائرة يمر من مركز الدائرة .



طرائـق خــاصة لإيجــاد معادلـة مماس لدائـرة

1) معادلة مماس لدائرة في نقطة منها $M\left(x_1 , y_1\right) \in C$ بالاعتماد على خاصة تعامد المماس لدائرة مع نصف قطرها :

$$\left(x_1 - x_0\right)\left(x - x_1\right) + \left(y_1 - y_0\right)\left(y - y_1\right) = 0$$

* ملاحظة : إذا لم يذكر صراحةً أن النقطة تقع على الدائرة يجب التحقق من وقوعها على الدائرة قبل الحل .

2) معادلة مماس لدائرة من نقطة خارجها :

تعتمد على كتابة حزمة المستقيمات المارة بالنقطة $y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$ بالشكل العام .

ثم تطبيق دستور بعد نقطة عن مستقيم (بعد مركز الدائرة عن حزمة المستقيمات = نصف قطرها) لإيجاد m .

* ملاحظة : إذا نتج قيمة واحدة لـ m ينتج مماس أول ويكون المماس الثاني هو : $x - x_1$

* ملاحظة : لإيجاد معادلة المماس لمنحنٍ ما من نقطة خارجه نحل حزمة المستقيمات مع معادلته ونجعل $\Delta = 0$.

3) معادلة مماس لدائرة يوازي مستقيماً معلوماً :

تعتمد على كتابة معادلة حزمة المستقيمات الموازية للمستقيم المعلوم بالشكل العام : $mx - y + h = 0$

ثم تطبيق دستور بعد نقطة عن مستقيم (بعد مركز الدائرة عن حزمة المستقيمات = نصف قطرها) لإيجاد h .

الأوضــاع المختلفـة لدائرتيـن

لدراسة تقاطع دائرتين نحل جملة معادلتيهما حلاً مشتركاً ونميز الحالات الآتية :

1) الدائرتان متقاطعتان بنقطتين مختلفتين : عندما يكون لمعادلة الحل المشترك لهما حلين ($\Delta > 0$) .

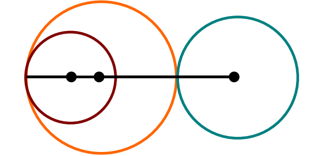
أو تحققان الشرط : $\left|R_1 - R_2\right| < O_1O_2 < R_1 + R_2$

2) الدائرتان متعامدتان : عندما تكونا متقاطعتان والمماسين لهما في إحدى نقطتي تقاطعهما

متعامدين أي تحققان الشرط ($\overline{O_1O_2}^2 = R_1^2 + R_2^2$)

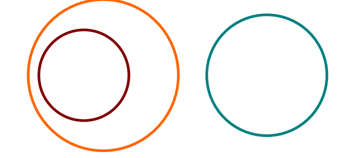
3) الدائرتان متماستان : a – شرط التماس الداخلي : $O_1O_2 = \left|R_1 - R_2\right|$

b – شرط التماس الخارجي : $O_1O_2 = R_1 + R_2$



4) الدائرتان متباعدتان : a – خارجاً عندما $O_1O_2 > R_1 + R_2$

b – داخلاً عندما $O_1O_2 < \left|R_1 - R_2\right|$



التحويـلات النقطية

1) **الانسحاب** $t_{\vec{v}}$ **:** نطبق الدستورين $x' = x + a \;,\; y' = y + b$ حيث $\vec{v} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$ شعاع الانسحاب .

2) **التحاكي** $h_{(o,k)}$ **:** نطبق الدستورين $x' = k \cdot x \;,\; y' = k \cdot y$ حيث k نسبة التحاك الذي مركزه o .

* ملاحظة : تركيب تحويلين $t_2 \circ t_1$ يعني إيجاد t_1 ثم t_2 حيث تشير العملية $\circ$ لكلمة (يلي) .

القطـــع المكـــافئ

تعريفه : ($\mathcal{P}$) هو مجموعة نقاط المستوي التي بعد كل منها عن نقطة F ثابتة يساوي بعدها عن مستقيم Δ ثابت .

أي إذا كانت $M \in \mathcal{P}$ وكانت N مسقطها القائم على Δ : $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow MF = MN$

* ملاحظة (1) : القطع المكافئ متناظر بالنسبة لمحوره .

* ملاحظة (2) : لرسم القطع المكافئ نعين محرقه F وذروته O ونحدد محوره , ثم نأخذ من F عموداً" على محوره ونحدد طول يساوي P على طرفي F فنحصل على نقطتين , نرسم القطع المار منهما ومن الذروة .

* ملاحظة (3) : الوتر المحرقي قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين من القطع وتمر بمحرقه .

الشكـــل النمـــوذجي لمعادلـــة قطـــع مكـــافئ

الشكل	$(y-y_0)^2 = 2P(x-x_0)$	$(y-y_0)^2 = -2P(x-x_0)$
الذروة	$M_0(x_0, y_0)$	$M_0(x_0, y_0)$
المحور يوازي	$x'x$	$x'x$
جهة التقعر نحو	ox^{+}	ox^{-}
المحرق	$F\left(x_0+\frac{P}{2}, y_0\right)$	$F\left(x_0-\frac{P}{2}, y_0\right)$
معادلة الدليل	$\Delta : x = x_0 - \frac{P}{2}$	$\Delta : x = x_0 + \frac{P}{2}$

الشكل	$(x-x_0)^2 = 2P(y-y_0)$	$(x-x_0)^2 = -2P(y-y_0)$
الذروة	$M_0(x_0, y_0)$	$M_0(x_0, y_0)$
المحور يوازي	$y'y$	$y'y$
جهة التقعر نحو	oy^{+}	oy^{-}
المحرق	$F\left(x_0, y_0+\frac{P}{2}\right)$	$F\left(x_0, y_0-\frac{P}{2}\right)$
معادلة الدليل	$\Delta : y = y_0 - \frac{P}{2}$	$\Delta : y = y_0 + \frac{P}{2}$

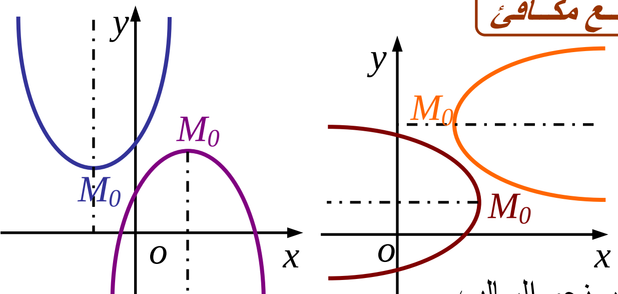


1) محور القطع يوازي $x'x$: $x = ay^2 + by + c$

2) محور القطع يوازي $y'y$: $y = ax^2 + bx + c$

* ملاحظة : إن مماس القطع المكافئ في ذروته عمود على محوره .

* ملاحظة : $a > 0$ يكون التقعر نحو الموجب , $a < 0$ يكون التقعر نحو السالب .

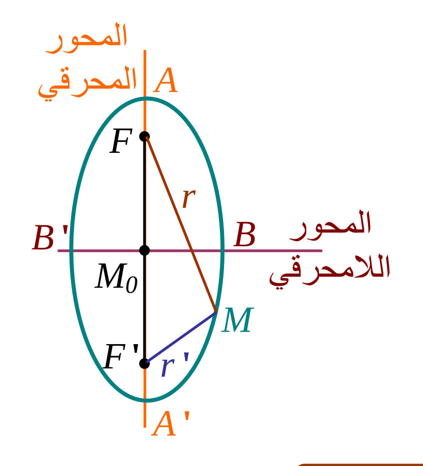


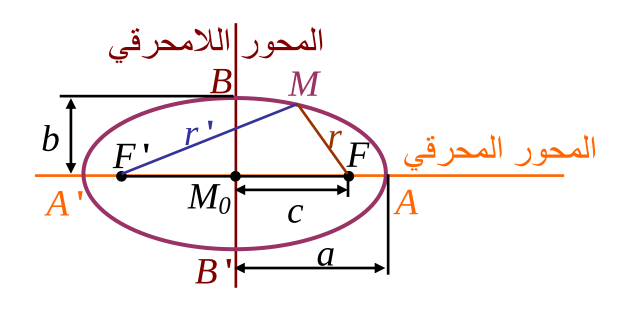
القطــع النــاقص

تعريفه : هو مجموعة نقط المستوي التي مجموع بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين F , F' يساوي طولا" ثابتا" $(2 a)$

نرمز القطع الناقص بالرمز E . أي : $M \in E \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$

* لاحظ : القطع الناقص متناظر بالنسبة إلى محوره المحرقي ومحوره اللامحرقي ومركزه .





الشكل النمـوذجي لمعادلـة قطـع نـاقص

المعادلة من الشكل	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$
المحور المحرقي يوازي	$x'x$	$y'y$
الذروتان $AA' = 2a$ البعد بينهما = القطر الكبير	$A(x_0+a, y_0)$ $A'(x_0-a, y_0)$	$A(x_0, y_0+a)$ $A'(x_0, y_0-a)$
الذروتان $BB' = 2b$ البعد بينهما = القطر الصغير	$B(x_0, y_0+b)$ $B'(x_0, y_0-b)$	$B(x_0+b, y_0)$ $B'(x_0-b, y_0)$
المحرقين $FF' = 2c$ البعد بينهما = البعد المحرقي	$F(x_0+c, y_0)$ $F'(x_0-c, y_0)$	$F(x_0, y_0+c)$ $F'(x_0, y_0-c)$
نصفا القطرين المحرقيين $r + r' = 2a$	$r = a - \frac{c}{a}(x-x_0)$ $r' = a + \frac{c}{a}(x-x_0)$	$r = a - \frac{c}{a}(y-y_0)$ $r' = a + \frac{c}{a}(y-y_0)$
معادلتا الدليلين $\Delta\Delta' = 2\frac{a^2}{c}$	$\Delta : x = x_0 + \frac{a^2}{c}$ $\Delta' : x = x_0 - \frac{a^2}{c}$	$\Delta : y = y_0 + \frac{a^2}{c}$ $\Delta' : y = y_0 - \frac{a^2}{c}$

* لاحظ : إذا كان العدد الأكبر مقام لـ x^2 فالمحور المحرقي $// \; x'x$, وإذا كان لـ y^2 فالمحور المحرقي $// \; y'y$.

* في كلا الحالتين العلاقة بين وسطاء القطع الناقص : $a^2 = c^2 + b^2$, والتباعد المركزي : $e = \frac{c}{a} < 1$.

الشكـل العـام لمعادلـة قطـع نـاقص

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \quad : A\cdot B>0 \; , A\neq B$$

كل معادلة من الشكل السابق ترد بالاتمام إلى مربعين كاملين إلى الشكل :

$$\frac{(x-x_0)^2}{m^2}+\frac{(y-y_0)^2}{n^2}=k \quad : m\cdot n\neq 0$$ ونميز ثلاثة حالات :

1) $k<0$ المعادلة تمثل المجموعة الخالية .

2) $k=0$ المعادلة تمثل نقطة واحدة هي $M_0(x_0 , y_0)$.

3) $k>0$ المعادلة تمثل قطعا" ناقصا" مركزه $M_0(x_0 , y_0)$.

التمثيـل الوسيـطي للقطـع النــاقص

$$x=x_0+a\cdot\cos\theta \quad , \quad y=y_0+b\cdot\sin\theta$$

الدائــرة الأصليـة للقطـع النــاقص

هي دائرة مركزها مركز القطع ونصف قطرها (a) أي معادلتها :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$$

الدائــرة الثانويـة للقطـع النــاقص

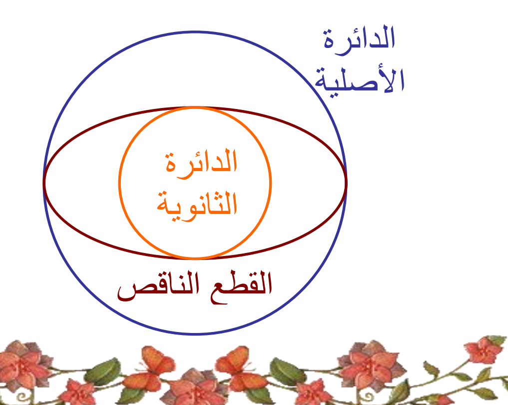
هي دائرة مركزها مركز القطع ونصف قطرها (b) أي معادلتها :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=b^2$$

* مبرهنة : مساحة القطع الناقص تعطى بالعلاقة : $S=\pi\, a\cdot b$

* نتيجة (1) : مساحة السطح المحصور بين القطع ودائرته الأصلية : $S=\pi a^2-\pi\, a\cdot b=\pi a(a-b)$

* نتيجة (2) : مساحة السطح المحصور بين القطع ودائرته الثانوية : $S=\pi\, a\cdot b-\pi b^2=\pi b(a-b)$



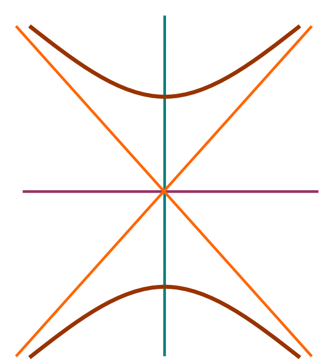


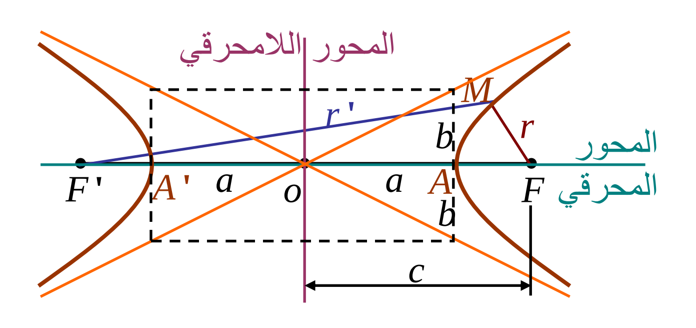
القطـع الزائـد

تعريفه : هو مجموعة نقط المستوي التي فرق بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين F , F' يساوي طولا "ثابتا" $(2a)$

نرمز القطع الزائد بالرمز H . أي : $M \in H \Leftrightarrow | MF - MF' | = 2a$

* لاحظ : القطع الزائد متناظر بالنسبة إلى محوره المحرقي ومحوره اللامحرقي ومركزه .





الشكل النموذجي لمعادلة قطع زائد

المعادلة من الشكل	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$
المحور المحرقي يوازي	$x'x$	$y'y$
الذروتان $AA' = 2a$	$A (x_0 + a , y_0) , A' (x_0 - a , y_0)$	$A (x_0 , y_0 + a) , A' (x_0 , y_0 - a)$
المحرقين $FF' = 2c$	$F (x_0 + c , y_0) , F' (x_0 - c , y_0)$	$F (x_0 , y_0 + c) , F' (x_0 , y_0 - c)$
نصفا القطرين المحرقيين $\| r - r' \| = 2a$	$r = \left\| a - \frac{c}{a}(x - x_0) \right\|$ $r' = \left\| a + \frac{c}{a}(x - x_0) \right\|$	$r = \left\| a - \frac{c}{a}(y - y_0) \right\|$ $r' = \left\| a + \frac{c}{a}(y - y_0) \right\|$
معادلتا الدليلين $\Delta\Delta' = 2\frac{a^2}{c}$	$\Delta : x = x_0 + \frac{a^2}{c}$ $\Delta' : x = x_0 - \frac{a^2}{c}$	$\Delta : y = y_0 + \frac{a^2}{c}$ $\Delta' : y = y_0 - \frac{a^2}{c}$
معادلتا مقاربيه	$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$ $y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0)$	$y - y_0 = \frac{a}{b}(x - x_0)$ $y - y_0 = -\frac{a}{b}(x - x_0)$

* لاحظ : إذا كان إشارة x^2 موجبة فالمحور المحرقي $x'x //$ وإذا كان إشارة y^2 موجبة فالمحور المحرقي $y'y //$

* في كلا الحالتين العلاقة بين وسطاء القطع الزائد : $c^2 = a^2 + b^2$, والتباعد المركزي : $e = \frac{c}{a} > 1$.

* حالة خاصة : إذا كان $a = b$ يكون القطع الزائد متساوي الساقين (مقاربيه متعامدين) .

الشكـل العـام لمعادلـة قطـع زائـد

$$A x^2 + B y^2 + C x + D y + E = 0 \quad : \; A \cdot B < 0$$

* إذا اعطينا معادلة من الشكل السابق نتمم إلى مربعين كاملين وعندئذٍ المعادلة الناتجة :

تمثل قطع زائد إذا كان الطرف الثاني $\neq$ الصفر , وخلاف ذلك تمثل إجتماع مستقيمين .

التمثيـل الوسيطي للقطـع الزائـد

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow x = x_0 + \frac{a}{\cos\theta} \quad , \quad \frac{y - y_0}{b} = \tan\theta \Rightarrow y = y_0 + b \cdot \tan\theta$$

* قضية : في كل من القطع الناقص والزائد يمكن إيجاد العلاقة بين نصفي القطرين المحرقيين والزاوية بينهما كما يأتي :

1) القطع ناقص :

$$(2c)^2 = r^2 + r'^2 - 2r \cdot r' \cos\theta = (r + r')^2 - 2r \cdot r' - 2r \cdot r' \cos\theta$$

$$4c^2 = 4a^2 - 2r \cdot r'(1 + \cos\theta) \Rightarrow r \cdot r'(1 + \cos\theta) = 2b^2$$

2) القطع زائد :

$$(2c)^2 = r^2 + r'^2 - 2r \cdot r' \cos\theta = (r - r')^2 + 2r \cdot r' - 2r \cdot r' \cos\theta$$

$$4c^2 = 4a^2 + 2r \cdot r'(1 - \cos\theta) \Rightarrow r \cdot r'(1 - \cos\theta) = 2b^2$$

معادلـة قطـع زائـد متـساوي الساقيـن منـسوب إلى مقاربيـه

1) إذا كانت معادلة القطع $x^2 - y^2 = a^2$

فهو يقع في الربعين الأول والثالث بالنسبة إلى جملة المقاربين .

فالمعادلة : $X\,Y = \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{4}$ هي معادلة قطع زائد منسوب إلى مقاربيه .

محوره المحرقي منصف الربع الأول لجملة مقاربيه ومعادلته $Y = X$ وهو منطبق على المحور $x'x$.

2) إذا كانت معادلة القطع $y^2 - x^2 = a^2$ فهو يقع في الربعين الثاني والرابع بالنسبة إلى جملة المقاربين .

فالمعادلة : $X\,Y = -\frac{a^2}{2} = -\frac{c^2}{4}$ هي معادلة قطع زائد منسوب إلى مقاربيه .

محوره المحرقي منصف الربع الثاني لجملة مقاربيه ومعادلته $Y = -X$ وهو منطبق على المحور $y'y$.

* قضايا هامة :

1 – نقبل أن كل معادلة من الشكل $X\,Y =$ ثابت $\neq 0$ هي معادلة قطع زائد منسوب إلى مقاربيه .

2 – معادلة المحور المحرقي :

1) المحور المحرقي يوازي منصف الربع الأول معادلته : $y - y_0 = x - x_0$, حيث (x_0 , y_0) مركز القطع .

2) المحور المحرقي يوازي منصف الربع الثاني معادلته : $y - y_0 = -(x - x_0)$, حيث (x_0 , y_0) مركز القطع .

3 – لتعيين ذروتي القطع : نوجد الحل المشترك لمعادلة المحور المحرقي مع معادلة القطع .

4 – لتعيين محرقي القطع : نوجد الحل المشترك لمعادلة المحور المحرقي مع معادلة الدائرة التي مركزها مركز القطع ونصف قطرها c أي : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c^2$

5 – إيجاد معادلتي الدليلين : بما أن الدليل يعامد المحور المحرقي نميز الحالتين :

1) إذا كان المحور المحرقي يوازي المنصف الأول فإن معادلة الدليل $y=-x+\lambda$ أي : $x+y-\lambda=0$

2) إذا كان المحور المحرقي يوازي المنصف الثاني فإن معادلة الدليل $y=x+\lambda$ أي : $x-y+\lambda=0$

في كلا الحالتين نحسب λ بتطبيق دستور بعد نقطة (المركز M_0) عن مستقيم (الدليل) :

$$\frac{|x_0 \pm y_0 \mp \lambda|}{\sqrt{2}}=\frac{a^2}{c} \Rightarrow |x_0 \pm y_0 \mp \lambda|=a$$

6 – كل خط بياني لتابع كسري تناظري $f(x)=\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$ هو قطع زائد متساوي الساقين منسوبا" لمقاربيه المتعامدين

لبرهان ذلك نتبع ما يأتي :

1) نوجد معادلتي مقاربيه ($y=\dfrac{a}{a'}$, $x=-\dfrac{b'}{a'}$) ثم نوجد (x_0 , y_0) نقطة تقاطع مقاربيه .

2) نطبق دستوري سحب المحاور : $x=X+x_0$, $y=Y+y_0$

فتنتج معادلة القطع من الشكل : $XY=$ ثابت $\neq 0$

التعريــف المشتــرك للقطــوع

- كل قطع (مكافئ , ناقص , زائد) هو مجموعة نقط المستوي التي نسبة (بعد كل منها عن نقطة ثابتة من المستوي) إلى (بعدها عن مستقيم ثابت في هذا المستوي) تساوي نسبة ثابتة .

- النقطة الثابتة هي محرق القطع , المستقيم الثابت هو دليل القطع المتعلق بهذا المحرق , النسبة الثابتة هي التباعد المركزي

- إذا كانت M نقطة من القطع ومسقطها القائم على الدليل Δ هو النقطة N يكون :

1) في القطع المكافئ ($\mathcal{P}$) : $\dfrac{MF}{MN}=e=1 \Rightarrow MF=MN$

2) في القطع الناقص (E) : $\dfrac{MF}{MN}=\dfrac{MF'}{MN'}=e=\dfrac{c}{a}<1$

3) في القطع الزائد (H) : $\dfrac{MF}{MN}=\dfrac{MF'}{MN'}=e=\dfrac{c}{a}>1$





التحويل إلى PDF :
S.H.H B
منتدى الرشيد التعليمي
http://shhada.syriaforums.net/